Nieprzemienne struktury algebraiczne i ich zastosowania. Zestaw 2.

1. Niech $E = End({}_RM)$ i niech nM oznacza sumę prostą n kopii M. Pokaż, że wówczas $End({}_R(nM))$ jest izomorficzny z $M_n(E)$.
2. Czy każdy podpierścień lewostronnie półprostego pierścienia R jest półprosty? Czy każdy pierścień można zanurzyć w lewostronnie półprosty pierścień?
3. Wskaż wsród następujących $\mathbb{Z}$ modułów, moduły półproste:
$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{12}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times ..., \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus ..., \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times ...$$
4. Niech R będzie pierścieniem oraz M lewostronnym R modułem Pokaż, że M jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy M jest izomorficzny z R/I gdzie I jest lewostronnym maksymalnym ideałem R
5. Niech x, y będą elementami R takimi, że $Rx = Ry$. Pokaż, że istnieje R-modułowy isomorfizm $f : xR \to yR$ taki, że $f(x) = y$
6. Niech R będzie pierścieniem, który jest prawostronnie półprosty. Pokaż, że dla $x, y \in R$, $Rx = Ry$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = uy$ dla pewnego $u \in U(R)$.