Nieprzemienne struktury algebraiczne i ich zastosowania. Zestaw 3.

1. Pokaż, że dla półprostego modułu M nad pierścieniem R, następujące warunki są równoważne:

   (1) M jest skończenie generowany

   (2) M jest noetherowski

   (3) M jest artinowski

   (4) M jest skończoną sumą prostych podmodułów

2. Pokaż, że jeśli R jest półprosty, to $M_n(R)$ także jest półprosty.

3. Niech R będzie dziedziną. Pokaż, że jeśli $M_n(R)$ jest półprosty, to R jest pierścieniem z dzieleniem.

4. Niech M będzie skończenie generowanym lewostronnym R-modułem i niech $E = End_R(M)$. Pokaż, że jeśli R jest półprosty (odpowiednio, prosty artinowski), to także taki jest E.

5. (a) Niech R, S będą pierścieniami takimi, że $M_m(R)$ jest izomorficzny z $M_n(S)$. Czy wówczas $m = n$ i R jest izomorficzny z S.

   (b) Pierścień A nazywamy pierścieniem macierzowym jeśli A jest izomorficzny z $M_m(R)$ dla pewnego R i $m > 1$. Czy prawdą jest że homomorficzny obraz pierścienia macierzowego zawsze jest pierścieniem macierzowym.