Nieprzemienne struktury algebraiczne i ich zastosowania. Zestaw 4.

1. Pokaż, że jeśli $f : R \to S$ jest surjektywnym homomorfizmem pierścieni, to $f(J(R)) \subseteq J(S)$. Podaj przykład na to, że $f(J(R))$ może być właściwym podzbiorem $J(S)$.
2. Niech R będzie pierścieniem wszystkich ciągłych funkcji z $< 0, 1 >$ w $\mathbb{R}$. Pokaż, że R jest J-półprosty.
3. Niech $x \in J(R)$, gdzie R jest K-algebrą. Wtedy, x jest algebraiczny nad K wtedy i tylko wtedy, gdy x jest nilpotentny (istnieje n takie, że $x^n = 0$).
4. Niech R będzie algebraiczną algebrą nad ciałem K. Wtedy $J(R)$ jest największym nil ideałem w R.
5. Przypuśćmy, że $dim_K(R) < |K|$ gdzie R jest K-algebrą. Pokaż, że wówczas $J(R)$ jest nil ideałem.