ELiTM 0 Indukcja

Zasada minimum Każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych zawiera liczbę najmniejszą.

Zasada indukcji Jeżeli
(1) istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie że $T(n_0)$ jest prawdziwe;
(2) z faktu, że $T(n)$ jest prawdziwe dla $n \geqslant n_0$ wynika, że $T(n+1)$ jest prawdziwe;
to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant n_0$.

Zasada silnej indukcji
Jeżeli z faktu, że $T(n_0), T(n_0+1), \ldots T(n-1), T(n)$ są prawdziwe wynika, że $T(n+1)$ jest prawdziwe, to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \geqslant n_0$.

Udowodnić indukcyjnie wzór:

0.1 $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + .. + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$,

0.2 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$,

0.3 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$,

0.4 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = \frac{1}{4}(1+n)^2 n^2$,

0.5 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$,

0.6 $2^3 + 4^3 + \ldots (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$,

0.7 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

0.8 $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + .. + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geqslant 2$,

0.9 $n^3 < 4^n$,

0.10 $3^n > n2^2$,

0.11 $5n \leqslant n^2 - 3$ dla $n \geqslant 6$,

0.12 $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$,

0.13 $8 | 11^n - 3^n$,

0.14 $11 | 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$,

0.15 $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$,

0.16 $9 | 4^n + 24n - 1$.

0.17 Udowodnić indukcyjnie, że suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wynosi $(n-2)\pi$.

0.18 Niech $A = \{n \in \mathbb{N} : 2 | n^2 - 3n + 3\}$. Wykazać, że jeśli $n \in A$ to $n+1 \in A$. Znaleźć dowolny element zbioru A.

0.19 Dany jest ciąg $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$. Napisać i udowodnić ogólny wzór ciągu.

0.20 Sadzamy $2n$ dzieci do n wagoników po dwoje. Na ile sposobów można to zrobić?

0.21 Na ile najwięcej kawałków można podzielić pizzę przy pomocy n cięć. Znaleźć rekurencyjną zależność oraz wzór ogólny, udowodnić indukcyjnie poprawność tego wzoru.

0.22 Udowodnić, że aby połamać czekoladę o wymiarach p na r aby były same kawałki 1 na 1 potrzeba $p \cdot r - 1$ złamań oraz że ta liczba nie zależy od sposobu łamania.

0.23 Udowodnić, ze istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

0.24 Udowodnić indukcyjnie, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można w sposób jednoznaczny przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych.

0.25 Udowodnić, że liczy Fermata F_n są względnie pierwsze. $F_n = 2^{2^n} + 1$ dla $n \geqslant 0$.

0.26 Udowodnimy indukcyjnie, że wszystkie koty są tego samego koloru. Krok pierwszy: Weźmy jednego kota. Jest on tego samego koloru co on sam.
Krok indukcyjny: Załóżmy że każde n kotów jest tego samego koloru. Pokażemy, że wtedy każde $n+1$ kotów jest tego samego koloru.
Weźmy $n+1$ kotów. Bez pierwszego będzie ich n, zatem są tego samego koloru na mocy założenia indukcyjnego. Bez ostatniego też jest ich n, więc są tego samego koloru. Środkowe koty nie zmieniają koloru, więc wszystkie $n+1$ muszą mieć ten sam kolor. Na podstawie indukcji matematycznej wykazaliśmy, że wszystkie koty mają ten sam kolor.
Jaki to kolor?

ELiTM 1 Logika

1.1 Obliczyć wartość logiczną:
a) $[((0 \wedge 1) \vee (1 \vee 0)] \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1)$
b) $[(1 \Rightarrow 0) \wedge (0 \Rightarrow 1)] \Rightarrow (1 \Leftrightarrow 0)$
c) $(0 \Rightarrow 1) \Rightarrow [(1 \Rightarrow 0) \wedge \sim (1 \Rightarrow 0)]$

1.2 Rozwiązać równania dla $x, y, z \in \{0, 1\}$:
a) $[(x \vee y) \Rightarrow (x \wedge y)] \wedge x = 1$
b) $[(x \vee y) \Rightarrow x] \Leftrightarrow y = 0$
e) $(\sim (u \Rightarrow (x \vee \sim y))) \wedge (z \Leftrightarrow (\sim x)) \wedge ((\sim u) \Leftrightarrow v) = 1$,
c) $[(x \vee y) \Rightarrow x] \Leftrightarrow x = 1$
d) $[(x \vee z) \Rightarrow y] \Leftrightarrow [y \wedge (x \vee z)] = 0$
f) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow z) \vee (z \Rightarrow t) \vee (t \Rightarrow x) = 0$.

1.3 Sprawdzić czy podane formuły są tautologiami. Zapisać podane formuły w postaci disjunktywno-koniunktywnej czyli w postaci: $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee ... \vee \alpha_k$ gdzie $\alpha_1, .., \alpha_k$ są koniunkcjami zmiennych oraz zaprzeczeń zmiennych.
a) $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
b) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$
c) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
d) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \Rightarrow q)]$
e) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim (p \Rightarrow r)] \Rightarrow [\sim (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$
f) $[(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow p)]$
g) $\sim [(p \vee q \vee r) \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)]$
h) $(p \wedge q \wedge \sim r) \Leftrightarrow [(\sim p \Rightarrow \sim q) \vee r]$

1.4 Niech $\Phi_n(p) := (\ldots(((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow p)\ldots) \Rightarrow p$, gdzie n jest liczbą wystąpień zdania p. Dla jakich n wyrażenie to jest tautologią?

1.5 Pokazać, że jeśli formuła $\alpha \Rightarrow \sim \beta$ jest tautologią, to dla każdej γ, formuła $(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$ też jest tautologią.

1.6 Pokazać, że jeśli formuły $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ i $\beta \Leftrightarrow \delta$ są tautologiami, to jest również tautologią wyrażenie $(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow (\gamma \wedge \delta)$.

1.7 Pokazać, że jeśli prawdziwe są: wynikania $p_1 \Rightarrow q_1, \ldots, p_n \Rightarrow q_n$ oraz zdania $(p_1 \vee \ldots \vee p_n)$ i $\sim (q_i \wedge q_j)$ dla $i \neq j$, to prawdziwe są też wynikania $q_1 \Rightarrow p_1, \ldots, q_n \Rightarrow p_n$.

1.8 Zdefiniować negację, alternatywę, koniunkcję, implikację oraz równoważność przy pomocy:
a) Funktora Sheffera $|$, gdzie $p \mid q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
b) Funktora Peircea $\downarrow$, gdzie $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
Wykazać, że to jedyne dwa funktory dwuargumentowe, przy pomocy, których można zdefiniować podane funkcje logiczne.

1.9 Czy dane zdania są prawdziwe?
a) Jeśli Krysia studiuje na PW i Krysia lubi ELiTM to Krysia z ELiTMu ma piątkę lub Krysia studiuje na PW.
b) Jeśli Krysia studiuje na PW i Krysia lubi ELiTM to Krysia z ELiTMu ma piątke i Krysia lubi ELiTM.
c) Jeśli Krysia studiuje na PW i Krysia lubi ELiTM to Krysia lubi PW lub też jeśli Krysia lubi PW i ELiTM to studiuje na PW.
d) Z faktu, że pan A idzie w kapeluszu jeśli pan B idzie do teatru wynika, że jeden z nich idzie do teatru.
e) Jeżeli figura A jest czworokątem i A ma wszystkie kąty równe, to z faktu, że A jest czworokątem wynika, że A ma boki równe.
f) Jeżeli liczba a dzieli się przez 3 i dzieli się przez 5, to z faktu, że a nie dzieli się przez 3, wynika, że a nie dzieli się przez 5.

ELiTM 2 Rachunek predykatów

2.1 Czy podane zdania są prawdziwe? (uwaga pytanie może być podchwytliwe) Zmienne oznaczają liczby rzeczywiste.
a) $(\exists y)\ y^2 < 0$, b) $\forall x \exists y\ x \cdot y = x$, c) $\forall x \exists y\ x \cdot y = y$, d) $\exists y \forall x\ x \cdot y = x$,
e) $\exists y \forall x\ x \cdot y = y$, f) $\forall x \exists y\ x \cdot y = 1$, g) $\exists y \forall x\ x \cdot y = 0$, h) $\exists y \forall x\ x \cdot y = 1$,
i) $(\forall x) xy = 7$, j) $(\forall x) x \in \emptyset \Rightarrow x > 0$.

2.2 Sprawdzić, czy prawdziwe są następujące formuły:
a) $(\forall x)(p(x) \Rightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall x)p(x) \Rightarrow (\forall x)q(x))$,
b) $(\forall x)(p(x) \Leftrightarrow q(x)) \Rightarrow ((\forall x)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)q(x))$,
c) $(((\forall x)\phi(x)) \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi)$, gdzie ψ nie zawiera x jako zmiennej wolnej,
d) $(\forall y)(\exists x)\phi(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)\phi(x, y)$,
e) $((\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$.

2.3 Sprawdzić, czy następujące formuły są tautologiami:
a) $((\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))$,
b) $((\forall x)\phi(x) \Rightarrow (\forall x)\psi(x)) \Rightarrow (\forall x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$,
c) $((\exists x)(\phi(x) \Leftrightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow (\exists x)\psi(x))$.

2.4 Czy formuły $(\forall x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x)$ i $(\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))$ są równoważne?

2.5 Przekształcić następujące formuły tak, aby wszystkie kwantyfikatory znalazły się na początku formuły:
a) $(\forall x)(\exists y)\phi(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)\phi(x, y)$,
b) $((\exists x)(\phi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow ((\exists x)\phi(x) \Rightarrow (\exists x)\psi(x))$,
c) $(\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)\psi(x, y)$.

2.6 Zdanie

$$\sim (\forall x)(\exists y)(\forall z)((\phi(x, y, z) \Rightarrow \psi(x, y, z)) \vee \psi(x, y, z))$$

przekształcić równoważnie tak, by ze spójników zdaniowych występowały w nim jedynie negacja i koniunkcja.

2.7 Udowodnić podane formuły dla kwantyfikatorów ograniczonych, korzystając z tautologii dla kwantyfikatorów nieograniczonych.
a) $[(\forall x)_{\alpha(x)}\phi(x) \wedge (\forall x)_{\alpha(x)}\psi(x)] \Leftrightarrow (\forall x)_{\alpha(x)}(\phi(x) \wedge \psi(x))$
b) $\sim (\exists x)_{\alpha(x)}\phi(x) \Leftrightarrow (\forall x)_{\alpha(x)} \sim \phi(x)$

2.8 Podać interpretację symbolu α tak aby podane zdania były prawdziwe (1), nieprawdziwe (2)
a) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x, y)$
b) $(\forall x, y, z)[\alpha(x, y) \wedge \alpha(y, z) \Rightarrow \alpha(x, z)]$
c) $(\forall x, y)\alpha(x, y) \Leftrightarrow (\forall x)\alpha(x, x)$
d) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x, y) = y$

2.9 Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: spójników logicznych, kwantyfikatorów, zmiennych będących liczbami naturalnymi oraz symboli podanych w nawiasach, (można też definiować symbole pomocnicze).
a) *x jest podzielnikiem y* (symbole: $=, <, \cdot$),
b) *x jest liczbą pierwszą* $(=, <, \cdot, 1)$,
c) *dowolne dwie liczby mają najmniejsza, wspólną wielokrotność* $(=, <, \cdot)$,
d) *dowolne trzy liczby mają największy, wspólny podzielnik* $(=, <, \cdot)$,
e) *nie istnieje największa liczba* $(\leqslant)$,
f) nie istnieje największa liczba pierwsza $(=, <, \cdot)$,
g) istnieje największa liczba parzysta $(=, \leqslant, +)$,
h) między dwiema liczbami parzystymi istnieje liczba nieparzysta $(=, \leqslant, +, 1)$,

i) każda liczba, która jest sumą dwóch kwadratów jest podzielna przez 3 $(=, +, \cdot)$,
j) *każda liczba parzysta jest sumą dwóch kwadratów* $(=, \cdot, +)$,
k) *istnieje liczba o trzech podzielnikach* $(=, \cdot)$,
l) *między 10 a 20 istnieje dokładnie jedna liczba pierwsza* $(=, <, \cdot, 1, 10, 20)$,
m) *istnieje liczba, która nie jest kwadratem liczby nieparzystej* $(=, \cdot, +)$,
n) *dla każdej liczby nieparzystej istnieje większa od niej liczba parzysta* $(<, +)$,
o) *iloczyn liczb pierwszych jest sumą trzech liczb pierwszych* $(=, <, \cdot, +, 1)$.

2.10 Polecenie jak wyżej z tą różnicą, przy czym dla zmiennych oznaczających liczby rzeczywiste:
a) *nie istnieją ujemne kwadraty* $(<, \cdot, 0)$,
b) *iloczyn dwóch liczb o różnych znakach jest liczbą dodatnią* $(<, \cdot, 0)$,
c) *każda liczba dodatnia ma kwadratowy pierwiastek* $(=, <, \cdot)$,
d) *każde równanie liniowe ma rozwiązanie* $(=, 0, \cdot, +)$,
e) *każde równanie liniowe ma jednoznaczne rozwiązanie* $(=, 0, \cdot, +)$,
f) *istnieje wielomian stopnia* 2 *o dokładnie dwóch rozwiązaniach* $(=, 0, \cdot, +)$,
g) *każdy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi ma jednoznaczne rozwiązanie* $(=, 0, \cdot, +)$,
h) *zbiór liczb rzeczywistych jest zamknięty ze względu na dzielenie* $(=, >, \cdot, 0)$.
i) *jeśli liczba ma pierwiastek kwadratowy to jest dodatnia* $(=, >, \cdot, 0)$.

ELiTM 3 Zbiory

3.1 Ile jest różnych zbiorów pośród podanych:
$\{1,2,3,1,3,2,4\}$, $\{1,3,4,\sqrt{4},2\cdot 3\}$, $\{\frac{9}{3},2,3,4,(-1)^2,3\ +\ 1\}$,$\{1,2,3,4\}$.

3.2 Niech $p(x),q(x)$ będą wielomianami o współczynnikach rzeczywistych i niech $r(x)=p^2(x)+q^2(x)$. Jakie relacje inkluzji zachodzą między zbiorami pierwiastków tych wielomianów.

3.3 Czy prawdziwe jest zdanie
a) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
b) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
c) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\subseteq\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
d) $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$
e) $\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\}\in\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$

3.4 Niech
a) $A=\{\{X\},\emptyset\}$ i $B=\{\emptyset,\{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\}\}$.
b) $A=\{X,\{\emptyset\}\}$ i $B=\{\{\emptyset,\{\{\emptyset\}\}\},\{\emptyset\},\{\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset\}\}\}$.
Jakiemu zbiorowi musi być równy X, by $A\in B$? A jakiemu by $A\subseteq B$?

3.5 Podać przykład zbioru dwuelementowego takiego, że każdy jego element jest również jego podzbiorem.

3.6 Czy jest prawdą dla wszystkich $a,A,B,\mathcal{A}$?
a) jeśli $a\in A$ i $A\in\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?
b) jeśli $a\in A$ i $A=B$ to $a\in B$?
c) jeśli $a\in A$ i $A\neq B$ to $a\notin B$?
d) jeśli $a\notin A$ i $A\neq B$ to $a\in B$?
e) jeśli $a\in A$ i $A\subseteq\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?
f) jeśli $a\subseteq A$ i $A\in\mathcal{A}$ to $a\in\mathcal{A}$?

3.7 Udowodnić na podstawie definicji:
a) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$,
c) $A\subseteq X\wedge B\subseteq X\Rightarrow A\cup B\subseteq X$,
d) $Y\subseteq A\wedge Y\subseteq B\Rightarrow Y\subseteq A\cap B$,
e) $Y\subseteq A\wedge Y\cap B=\emptyset\Rightarrow Y\subseteq A-B$,
f) $A\cap B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq(-B)\cup C$,
g) $A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A\cap(-B)\subseteq C$.

3.8 Jakie relacje zachodzą między zbiorami A i B jeśli:
a) $A\cup B=\emptyset$,
b) $A-B=\emptyset$,
c) $A-B=B-A$.

3.9 Czy podane równości są prawdziwe. Prawdziwe udowodnić. Dla fałszywych podać kontrprzykład oraz zależności miedzy zbiorami A, B, C aby równości były prawdziwe.

a)$A \setminus [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)] = A \cap (B \cup -C) \cap (C \cup -B)$,
b)$(A \setminus C) \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap (B \cup A)$,
c) $A \cup (B - C) = [(A \cup B) - C] \cup (A \cap C)$,
d) $[(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B] = [A \cap (B \cup C)] \setminus (B \cap C)$
e) $\{[(A \cup D) \cap C] \cup B\} \setminus D = [(A \setminus D) \cap C] \cup (|B \setminus D)$,
f) $\{[(A \cap D) \cup C] \cap B\} \setminus D = [(A \setminus D) \cup C] \cap (|B \setminus D)$,
g)$[(A \cap B) \cup (C \setminus D)] \cap (D \setminus A) = (C \cap D) \setminus (A \cup B)$.
h) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
j) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$,
k) $(A \times Y) \cap (B \times X) = A \times B$ dla $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$,
l) $A \times B = B \times A$,
m) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
n) $2^{X \cap Y} = 2^X \cap 2^Y$,
o) $2^{X \cup Y} = 2^X \cup 2^Y$,

3.10 Niech $A \div B = (A - B) \cup (B - A)$. Udowodnić, że
a) $A = B \Leftrightarrow A \div B = \emptyset$,
b) $A \div C \subseteq (A \div B) \cup (B \div C)$,
c) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$,
d) $(A \div B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

3.11 Wyznaczyć X jeśli $A - X = B$ oraz $X - A = C$.

3.12 Niech $-A = X \setminus A, -B = Y \setminus B$. Wyrazić $-(A \times B)$ za pomocą $-A, -B, X, Y$.

3.13 Przedstawić podane zbiory jako iloczyn kartezjański:
a) Kwadrat na płaszczyźnie o boku o wierzchołkach (-1,4), (2,4),
b) Sześcian w przestrzeni o krawędzi o wierzchołkach (2,1,-2), (2,1,3),
c) Walec wysokości 1 i podstawie o promieniu 1.

3.14 Czy kulę można przedstawić jako iloczyn kartezjański ?

ELiTM 4 Sumy i przecięcia rodzin zbiorów

4.1 Znaleźć $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dla podanych rodzin zbiorów:
a) $A_i = (0; \frac{1}{i+1})$, b) $A_i = (0; \frac{1}{i+1}]$, c) $A_i = [0; \frac{1}{i+1}]$, d) $A_i = (i; \infty)$
e) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant \frac{1}{i+1}\}$ f) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0, y \leqslant x^i\}$.

4.2 Znaleźć $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ dla podanych rodzin zbiorów:
a) $A_i = (i; \infty)$, b) $A_i = (\frac{1}{i+1}; 1 - \frac{1}{i+1}]$; , c) $A_i = (-i; i)$, d) $A_i = (i; \infty)$,
e) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant i\}$, f) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leqslant \frac{1}{i+1}\}$,
h) $A_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geqslant 0, y \leqslant x^i\}$.

4.3 Wyznaczyć $\bigcup_a \bigcap_b X_{a,b}$, $\bigcap_a \bigcup_b X_{a,b}$, $\bigcap_b \bigcup_a X_{a,b}$, $\bigcup_b \bigcap_a X_{a,b}$ dla podanych rodzin zbiorów:
a) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \ \wedge 0 \leqslant y \ \wedge \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,
b) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant ax + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
c) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant ax(x-b)\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,
d) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant \frac{a}{b^2}x(x-2b)\}$
e) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \ \wedge 0 < y \ \wedge \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,
f) $X_{a,b} = \{x \in \mathbb{R} : a - \frac{1}{b} \leqslant x < a + \frac{1}{b}\}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N} - \{0\})$,
g) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leqslant ax^2 + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b > 0$,
h) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = a(x-b)^3 + b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,
i) $X_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2} : ax^2 < y \leqslant \sqrt[3]{ab^2}\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$,

4.4 Niech C będzie okręgiem o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych. Dla punktu $x \in C$ niech l_x oznacza prostą styczną do C przechodzącą przez x, a R_x otwartą półpłaszczyznę zawierającą początek układu współrzędnych wyznaczoną przez l_x. Znaleźć: a) $\bigcap_{x\in C} R_x$, b) $\bigcap_{x\in C-\{x_0\}} R_x$, gdzie $x_0 \in C$, c) $\bigcap_{x\in C-C_0} R_x$, gdzie C_0 jest pewnym łukiem C.

4.5 Wyznaczyć $\bigcup_{i\in\emptyset} A_i$ oraz $\bigcap_{i\in\emptyset} A_i$.

4.6 Jakie relacje inkluzji zachodzą pomiędzy zbiorami ? Dla inkluzji przeciwnych pokazać kontrprzykład.
a) $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{i\in I} B_i$ i $\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i)$
b) $\bigcap_{i\in I} A_i \cup \bigcap_{i\in I} B_i$ i $\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_i)$
c) $\bigcup_{i\in I}(A_i - B_i)$ i $\bigcup_{i\in I} A_i - \bigcap_{i\in I} B_i$
d) $\bigcap_{i\in I}(A_i \cup -B_i)$ i $\bigcap_{i\in I} A_i \cup -\bigcup_{i\in I} B_i$

4.7 Niech $(A_i : i \in \mathbb{N})$ będzie ciągiem zbiorów. Skonstruować ciąg zbiorów $(B_i : i \in \mathbb{N})$ taki, że $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ i $\bigcup_i B_i = \bigcup_i A_i$. Jak zmieni się konstrukcja jeśli założymy $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$?

4.8 Udowodnić, że jeśli $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ i $B_0 \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ to $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cup B_i) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \cup \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

4.9 Udowodnić, że
a) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J}(A_i \times B_j)$,
b) $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J}(A_i \times B_j)$,

4.10 Znaleźć nieskończoną rodzinę $\mathcal{X}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taką, że $\bigcap \mathcal{X} = \emptyset$ oraz $\bigcap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ dla dowolnej właściwej podrodziny $\mathcal{Y}$ rodziny $\mathcal{X}$.

ELiTM 5 Relacje

5.1 Niech $A = \{a, b, c, d, e\}$. Relację R zdefiniujmy jako:
$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (a, d), (c, d), (e, e), (a, c), (e, d)\}$. Narysuj graf tej relacji. Czy relacja jest zwrotna, symetryczna, przechodnia, antysymetryczna, przeciwzwrotna? Jak należałoby uzupełnić relację, lub które pary z niej usunąć, żeby miała wcześniej wymienione własności?

5.2 Zaznacz w tabeli, które z wymienionych relacji są zwrotne, symetryczne, przechodnie, antysymetryczne i przeciwzwrotne :

	zwrotna	symetryczna	przechodnia	antysymetryczna	przeciwzwrotna
$=$					
$\neq$					
$<$					
$\leqslant$					
$\subseteq$					
$\mid$					
$\parallel$					
$\perp$					
S					
P					
K					
$\emptyset$					
F					
A					
B					
C					
M					
D					
E					

Gdzie:
$=, \neq, <, \leqslant$ określone są na zbiorze $\mathbb{N}$ i zdefiniowane zgodnie z przyjętym znaczeniem
$\subseteq$ oznacza zawieranie w zbiorze podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$
$\mid$ oznacza relację podzielności na zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$
$\parallel$ i $\perp$ oznaczają prostopadłość i równoległość prostych na płaszczyźnie
$xSy \Leftrightarrow x$ jest synem y
$xPy \Leftrightarrow x$ jest potomkiem y
$xKy \Leftrightarrow x$ i y mają wspólną babkę
$\emptyset$ oznacza relację pustą
F oznacza relację pełną
$xAy \Leftrightarrow 2|x + y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$,
$xBy \Leftrightarrow 3|x + y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$
$xCy \Leftrightarrow 3|x - y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$
$xMy \Leftrightarrow n|x - y$ gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$ i n jest ustaloną liczbą naturalną
$xDy \Leftrightarrow xy = 4$ gdzie $x, y \in \mathbb{R}$
$xEy \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ gdzie $x, y \in \mathbb{R}$

5.3 Podać przykłady relacji która jest:
a) przeciwzwrotna i symetryczna, ale nie jest przechodnia,
b) przechodnia i symetryczna, ale nie jest zwrotna,
c) przechodnia i zwrotna, ale nie jest antysymetryczna.
d) symetryczna i przechodnia, ale nie jest zwrotna.

5.4 Które spośród podanych relacji są relacjami równoważności. Podać klasy abstrakcji.

a) dla $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy$ jest liczbą parzystą,
b) dla $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy$ jest liczbą nieparzystą,
c) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow (\exists\, q \in \mathbb{Q})\ x \cdot q = y$.
d)dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ jest postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$,
e) dla $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, $A \sim B \Leftrightarrow A \div B$ jest zbiorem skończonym,
f) dla $A, B \subseteq \{1, \ldots, 100\}$, $A \sim B \Leftrightarrow |A \div B|$ jest liczbą parzystą,
g) dla $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,
h) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow \mid x - y \mid < 1$,
i) dla $(x, y), (z, u) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \sim (u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 + u^2$,
j) dla $A, B \subseteq X$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cup -B = X$,
k) dla $A, B, C \subseteq X$, $A \sim B \Leftrightarrow A \cap B \supset C$,
l) dla $p, q \in \mathbb{R}[x]$ $p \sim q \Leftrightarrow p(x) \cdot q(x)$ jest wielomianem parzystego stopnia.

5.5 Niech R i S będą relacjami równoważności w zbiorze X. Czy $R \cup S$ and $R \cap S$ są relacjami równoważności ? Jeśli tak to jakie relacje inkluzji zachodzą pomiędzy ich klasami abstrakcji.

5.6 Niech $\mathcal{X} = \{[n; n + 1) : n \in \mathbb{Z}\}$. Zdefiniować relacje równoważności $\sim$ tak, aby $\mathbb{R}/_{\sim} = \mathcal{X}$

Złożenie relacji definiuje się następująco: $xS \circ Tz \Leftrightarrow \exists y\ xTy \wedge ySz$

5.7 Znaleźć złożenie relacji $R \circ R$ dla $=, <, \perp, S$

5.8 Znaleźć relacje $\perp \circ \parallel$, $S \circ B$ i $B \circ S$ gdzie S jest zdefiniowana w zadaniu 2 a $xBy \Leftrightarrow x$ jest bratem y.

5.9 Udowodnić, ze R jest relacją przechodnią, wtedy i tylko wtedy gdy $R \circ R = R$.

5.10 Udowodnić, ze R jest relacją symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$.

5.11 Niech R będzie relacją równoważności. Czy R^{-1}, $R \circ R$ są relacjami równoważności ?

5.12 Opisać wszystkie relacje, które jednocześnie są symetryczne i antysymetryczne.

5.13 Dla binarnej relacji R w zbiorze X oraz podzbioru $Y \subseteq X$ niech $R_{|Y}$ będzie relacją w Y zdefiniowana następująco

$$R_{|Y} = R \cap (Y \times Y).$$

Które z własności relacji R są dziedziczne na R_Y ?

5.14 * Dla binarnej relacji R w X i $x, y \in X$ niech xSy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ taki, że $x_1 = x, x_n = y$ i x_iRx_{i+1} dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.
Udowodnić, ze S jest najmniejsza relacją przechodnią zawierającą R.

ELiTM 6 Funkcje

6.1 Które z podanych relacji są funkcjami? Znaleźć ich dziedziny i zbiory wartości. Które z nich są różnowartościowe?

a) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^3 = y^4$,

b) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow \frac{y-1}{x} = 1$,

c) dla $x, y, z \in \mathbb{R}$, $(x, y)Sz \Leftrightarrow x + y + z^2 = 1$

d) dla $x, y \in \mathbb{N}$, $xUy \Leftrightarrow x$ jest największym pierwszym podzielnikiem y,

e) dla wielomianu p i $x \in \mathbb{R}$, $pTx \Leftrightarrow p(x) = 0$,

f) dla $A, B \subseteq X$, $A\mathcal{F}B \Leftrightarrow A \cup B = X\ i\ A \cap B = \emptyset$,

g) dla $A \subseteq \mathbb{N}, x \in N$, $A\mathcal{G}x \Leftrightarrow x$ jest iloczynem wszystkich elementów z A,

h) dla trójmianu o współczynnikach rzeczywistych f i $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\mathcal{V}A \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) x \in A \Leftrightarrow f(x) = 1$,

i) dla $x, y \in \mathbb{R}$, $xVy \Leftrightarrow (\exists z \in \mathbb{R})\ y = \frac{x+z}{2}$

6.2 Dla funkcji f i podzbioru A jej dziedziny znaleźć obraz $f(A)$ i przeciwobraz obrazu $f^{-1}(f(A))$

a) $f(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$, $A = [-2; 3)$,

b) $f(x, y) = x + y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(0, 0), (0, 1)\}$.

c) $f(x, y) = \frac{x}{y+1}$ dla $x, y \in \mathbb{N}$, $A = \{(1, 2)\}$.

d) $f(p) = p(1)$ dla wielomianu p o współczynnikach rzeczywistych, A jest rodziną wszystkich funkcji liniowych postaci $ax - a$.

e) $f(x, y) = (x + y, x - y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

f) $f(x, y) = x^2 + y^2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2 \wedge 0 < y < 1\}$.

g) $f(x, y) = \max(x, y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

h) $f(n) =$ suma wszystkich pierwszych podzielników liczby n dla $n \in \mathbb{N}$, $A = \{4, 6\}$,

i) $f(X) = X \times X$ dla $X \subseteq \mathbb{R}$, $A = \{[-x; x] : x \in \mathbb{R}\}$,

j) $f(X) = \{x \in \mathbb{R} : (\exists y)(x, y) \in X\}$ dla $X \subseteq \mathbb{R}^2$, A jest rodziną wszystkich zbiorów jednoelementowych.

6.3 Która inkluzja jest prawdziwa? Prawdziwą udowodnić, dla fałszywej znaleźć kontrprzykład. Udowodnić zachodzenie obu inkluzji w przypadku gdy f jest bijekcją.

a) $A \subseteq f^{-1}(f(A)$ czy $f^{-1}(f(A) \subseteq A$?

b) $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ czy $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$?

c) $f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$ czy $f(A - B) \subseteq f(A) - f(B)$?

6.4 Niech X będzie skończonym zbiorem i niech $f : X \to X$. Udowodnić, że istnieje $A \subseteq X$ takie, że $f(A) = A$.

6.5 Podane zdania zapisać jako formuły rachunku zdań. Można używać symboli: spójników logicznych, kwantyfikatorów, zmiennych, oraz symboli: $\in, \mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \leqslant, <, =, \cdot, +, -$.

a) Funkcja f jest rosnąca.

b) Funkcja f jest rosnąca lub malejąca.

c) Funkcja f jest ograniczona.

d) Funkcja f osiąga maksimum.

e) Funkcja f osiąga maksimum dokładnie jedno maksimum.

f) Funkcja f osiąga maksimum lub minimum.

g) Jeśli funkcja osiąga maksimum to jest ograniczona od góry.

h) Funkcja rosnąca nie posiada extremum.

i) Funkcja rosnąca jest różnowartościowa.

j) Funkcja ograniczona od góry nie musi mieć maksimum.

k) Nie istnieje parzysta funkcja rosnąca.

ELiTM 7 Zbiory Uporządkowane

7.1 Narysować diagram Hassego poniższych zbiorów uporządkowanych. Wskazać, o ile istnieją elementy minimalne, maksymalne, najmniejszy, największy.
a) $|$ (podzielność) w zbiorze (i) $\{2, 3, 4, \ldots, 15, 16\}$, (ii) $\{p \in \mathbb{N}^+ : p|96\}$,
b) $\subseteq$ (inkluzja) w

(i) zbiorze podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ o parzystej liczbie elementów,

(ii) w zbiorze $\{K((i, i), r_i) : i = 0, 1, \ldots, n\}$ kul otwartych o środkach w punktach (i, i) oraz promieniach r_i, gdzie $r_i = 2\sqrt{2}$ dla parzystych i oraz $r_i = \sqrt{2}$ dla nie parzystych i,

(iii) w zbiorze $\{[n, n + i] \subset \mathbb{R} : n \in \{0, .., 3\}, i \in \{1, .., 4\}\}$

7.2 Udowodnić że podane zbiory wraz z relacjami tworzą zbiory częściowo uporządkowane, narysować diagramy Hassego, podać wzory na sup oraz inf par elementów o ile to możliwe.
a) $(\{[n; n + i] : n = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, 3\}, \preceq)$, gdzie $[a; b] \preceq [c; d] \;\Leftrightarrow\; b < c \vee [a; b] = [c; d]$,
b) $(\mathcal{P}(\{1, .., 4\}), \preceq)$, gdzie $A \preceq B \Leftrightarrow A \subset B \wedge \max B \notin A$,
c) $(\{k \in \mathbb{N}^+ : k|144\}, \preceq)$, gdzie $x \preceq y \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}^+\ 2ix = y \vee x = y$.

7.3 Niech $(P, \leqslant_P)$ i $(Q, \leqslant_Q)$ będą zbiorami uporządkowanymi. Udowodnić, ze relacja $\preceq$ określona w $P \times Q$ zdefiniowanym następująco: $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a \leqslant_P c \wedge b \leqslant_Q d$ jest relacją porządku. Narysować diagram Hassego dla:
a) $P = Q = \{0, 1, 2, 3\}^2$, uporządkowanych przez zwykłą relację $\leqslant$,
b) $P = \{a, b, c\}$, $Q = \{x, y, z\}$, gdzie $a <_P b >_P c$, $x >_Q y <_Q z$.
Jaka zależność zachodzi między elementami minimalnymi (maksymalnymi) w $P \times Q$ i elementami minimalnymi (maksymalnymi) w P i w Q?

7.4 Niech P będzie skończonym zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$. Udowodnić, że dla każdego elementu $p \in P$ istnieją elementy x, y takie, że x jest elementem minimalnym w P, y jest elementem maksymalnym w P i $x \leqslant p \leqslant y$.

7.5 Wskazać zbiór uporządkowany o dokładnie jednym elemencie minimalnym i nie zawierający elementu najmniejszego.

7.6 Wskazać zbiór uporządkowany, który zawiera antyłańcuch dowolnej wielkości, ale nie zawiera antyłańcucha nieskończonego.

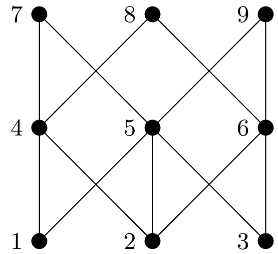
7.7 Dla zbioru uporządkowanego P i jego podzbioru X niech X^*, X_* oznacza odpowiednio $\{p \in P : (\forall x \in X) x \leqslant p\}$ i $\{p \in P : (\forall x \in X) p \leqslant x\}$. Znaleźć X^*, X_*, $(X^*)_*$, $(X_*)^*$ gdzie
a) $P = \mathbb{N}$, $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$, $X = \{12, 16, 24\}$,
b) $P = \mathcal{P}(A)$ uporządkowane przez $\subseteq$, $X = \{B, C, D\}$, gdzie $B, C, D \subseteq A$,
c) $X = \{[2; 3], [3; 4]\}$ w porządku zdefiniowanym w zadaniu 7.2a).

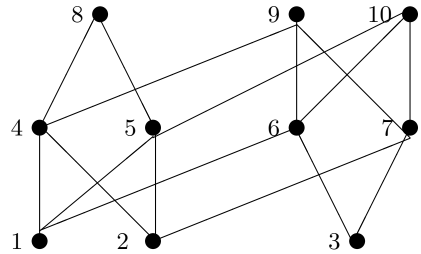
7.8 Znaleźć $\emptyset^*$ i $\emptyset_*$.

7.9 Niech $X \subseteq Y \subseteq P$. Jakie relacje inkluzji zachodzą między X^*, X_* i Y^*, Y_*?

7.10 Jakie relacje inkluzji zachodzą między X i $(X^*)_*$, $(X_*)^*$?

7.11 Znaleźć $\sup(x, y)$ i $\inf(x, y)$ (o ile istnieją) dla każdej pary $x, y \in P$ w zbiorach:





7.12 Kiedy istnieje $\sup \emptyset$ (odpowiednio $\inf \emptyset$) w danym zbiorze uporządkowanym ?

7.13 Udowodnić, że jeśli dla każdej pary x, y elementów zbioru uporządkowanego P istnieje $\sup(x, y)$ i $\inf(x, y)$ to istnieje $\sup A$ i $\inf A$ dla dowolnego skończonego zbioru $A \subset P$.

7.14 Niech P będzie skończonym zbiorem uporządkowanym przez relację $\leqslant$. Niech $A(P)$ będzie rodziną wszystkich antychańcuchów w zbiorze P. Rozważmy relację $\preceq$ określoną w zbiorze $A(P)$ następująco:

$$X \preceq Y \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ x \leqslant y.$$

Pokazać, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku.

ELiTM 8 Moce zbiorów

8.1 Wykazać równoliczność zbiorów A i B:
a) A - zbiór liczb całkowitych parzystych, B - zbiór liczb całkowitych nieparzystych;
b) $A = \mathbb{N}$ i $B = \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, gdzie $a_i \notin \mathbb{N}$;
c) A,B - dowolne dwa odcinki otwarte;
d) A - odcinek otwarty, B - odcinek jednostronnie domknięty;
e) A,B - dowolne dwa okręgi;
f) A,B - dowolne dwa koła;
g) A - prosta, B - odcinek otwarty;
h) A - prosta, B - półprosta domknięta.

8.2 Udowodnić, że jeśli $X \sim Y$ to $\mathcal{P}(X) \sim \mathcal{P}(Y)$.

8.3 Udowodnić, że dla każdego zbioru X, $\mathcal{P}(X) \sim \{0,1\}^X$.

8.4 Udowodnić, że rodzina wszystkich nieskończonych ciągów zero- jedynkowych jest równoliczna rodzinie wszystkich nieskończonych ciągów liczb rzeczywistych.

8.5 Jaka jest moc podanych zbiorów? Odpowiedź uzasadnić.
a) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \sin y\}$;
b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{N}} x = \ln y\}$;
c) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = \operatorname{tg} y\}$;
d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x - 4\}$;
e) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N}) x^n \in \mathbb{Q}\}$;
f) rodzina rozłącznych przedziałów liczb rzeczywistych;
g) $\{x \in \mathbb{R} : (\exists n \in \mathbb{N}) \sin^n x \in \mathbb{Q}\}$;
h) rodzina wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych;
i) rodzina wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach rzeczywistych stałych od pewnego miejsca;
j) rodzina rozłącznych kwadratów na płaszczyźnie;
k) $\{(x,y) \in \mathbb{R} : xy < 1\}$;
l) rodzina wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{Q}$;
m) rodzina wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb naturalnych;
n) rodzina wszystkich ściśle rosnących ciągów liczb rzeczywistych;
o) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = 2y\}$;
p) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y\}$;
r) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$;
s) $\{(x,y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x - y = 3\}$.
r) $\{x \in \mathbb{R} : tg\frac{1}{x} \in \mathbb{N}\}$.

8.6 Czy istnieje zbiór X taki, że $\mathcal{P}(X)$ jest mocy $\aleph_0$?